УДК 511.51

Л.Н. КУРТОВА, Н.Н. МОТЬКИНА
L.N. KURTOVA, N.N. MOT'KINA

О ЗАДАЧЕ КЛООСТЕРМАНА

В работе приведен результат изучения главного члена асимптотической формулы задачи Клоостермана.
Ключевые слова: асимптотическая формула, сумма Гаусса, сумма Клоостермана.

The paper presents the result of studying the main member of the asymptotic formula of Kloosterman's problem.
Keywords: asymptotic formula, Gauss sum, Kloosterman sum.

Клоостерман Х. рассматривал задачу о представлении натурального числа n в виде квадратичной формы $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, где a, b, c, d –натуральные, x, y, z, t – целые числа. Он получил асимптотическую формулу числа таких представлений

$$r(n)=\frac{\pi^2 n}{\sqrt{abcd}}S(n)+O(n^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S(n)=\sum_{q=1}^{\infty}A(q),$$

$$A(q)=\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{nl}{q}}S(q;al;0)S(q;bl;0)S(q;cl;0)S(q;dl;0),\quad A_1=1,$$

$$S(q;u;0)=\sum_{l=1}^{q}e^{2\pi i\frac{ul^2}{q}}$$

– сумма Гаусса. Также в работе [1] Клоостерман Х. описал случаи, когда число n не представимо в виде квадратичной формы $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$.

Выражение главного члена асимптотической формулы задачи Клоостермана в виде произведения по простым числам, применение точных формул для сумм Гаусса позволяет дополнить рассмотренные случаи [1] . Ранее авторами был получен результат для нечетных простых p, входящих в разложение a, b, c, d, n , при которых уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ не имеет решений [2].

В настоящей работе представлен результат для четного простого p, входящего в разложение a, b, c, d, n , когда число решений уравнения $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ равно нулю. Случай является новым и не рассматривался ранее.

Теорема. Пусть (n; 2) = 1 и три коэффициента делятся на 2:

$$a = 2^{\alpha} a_1,\ (a_1;\,2) = 1,\ b = 2^{\beta} b_1,\ (b_1;\,2) = 1,\ c = 2^{\gamma} c_1,\ (c_1;\,2) = 1,\ (d,2) = 1,$$

$$3 \le \alpha \le \beta \le \gamma .$$

Тогда уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений в следующих случаях

$$\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1 \text{ или } \left(\frac{2}{dn}\right) = -1.$$

Для доказательства теоремы используются вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для одномерной суммы Гаусса

$$S(q;l;m) = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i \frac{lj^2 + mj}{q}}$$

справедливы следующие утверждения:

1. Если (l; 2) = 1, то

$$S(2^{\alpha};l;0) = \begin{cases} 0, \text{если}\, \alpha = 1, \\ \left(\dfrac{2}{l}\right)^{\alpha} 2^{\alpha/2}(1 + i^{l}),\ \text{если}\, \alpha > 1. \end{cases}$$

2. Если (q; l) = n, то

$$S(q;l;m) = \begin{cases} 0, & \text{если}\, n \text{ не делит } m, \\ nS(q/n;l/n;m/n), & \text{если}\, n \text{ делит } m. \end{cases}$$

Доказательство. [3. с. 20].

Лемма 2 Пусть

$$K(2^{\alpha};n;0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^{\alpha}} e^{-2\pi i \frac{nl}{2^{\alpha}}}$$

– сумма Клоостермана. При (n; 2) = 1, α > 1

$$K(2;n;0) = -1;\ K(2^{\alpha};n;0) = 0.$$

Доказательство. [3. с. 46].

Лемма 3. Пусть

$$K_i(2^\alpha;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}$$

– измененная сумма Клоостермана. Пусть (n; 2) = 1, α > 2, тогда

$$K_i(2;n;0)=-i\,,\ K_i(4;n;0)=2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right),\ K_i(2^\alpha;n;0)=0\,.$$

Доказательство.

$$K_i(2;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2} i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2}}=i\cos\pi n=-i\,;$$

$$K_i(4;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^2} i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2^2}}=\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{3\pi n}{2}=\begin{cases}2, & \text{если } n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\\ -2, & \text{если } n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}=2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right);$$

при α > 1

$$K_i(2^\alpha;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}}-1}=0\,.$$

Лемма 4. Пусть

$$K_2(2^\alpha;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}$$

– обобщенная сумма Клоостермана. Если (n; 2) = 1, α > 3, тогда

$$K_2(8;n;0)=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{n}\right),\ K_2(2^\alpha;n;0)=0\,.$$

Доказательство.

$$K_2(8;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^3}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2^3}}=(1-e^{-\pi in/2})e^{-\pi in/4}(1-e^{-\pi in})=(1+i^n)\left(\frac{2}{n}\right)(1-i^n)\frac{1}{\sqrt{2}}2=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{n}\right),$$

при α > 3

$$K_2(2^\alpha;n;0)=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-2}}}-1}=0\,.$$

Лемма 5. Пусть

$$K_{2i}(2^\alpha;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}$$

– обобщенная измененная сумма Клоостермана. При (n; 2) = 1, α > 3

$$K_{2i}(8;n;0)=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right),\ K_{2i}(2^\alpha;n;0)=0\,.$$

Доказательство.

$$K_{2i}(8;n;0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^3}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2^3}}=(1-e^{-\pi in})ie^{-\pi in/4}(1+e^{-\pi in/2})=$$

$$=2i(2\cos\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{4}-2i\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4})=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right),$$

при α > 3

$$K_{2i}(2^{\alpha};n;0)=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-2}}}-1}=0$$

Доказательство теоремы.

Воспользуемся свойством мультипликативности функции $A(q)$, тогда

$$S(n)=\sum_{q=1}^{\infty}A(q)=\prod_{p|q}(1+A(p)+A(p^2)+\ldots).$$

Рассмотрим явные формулы для таких множителей при p=2. Так как $S(2;\ dl;\ 0)=0$ по лемме 1, то $A(2)=0$. По лемме 1 имеем

$$S(4;\ al;\ 0)\ S(4;\ bl;\ 0)\ S(4;\ cl;\ 0)\ S(4;\ dl;\ 0)=$$

$$=4S(1;a_1 2^{\alpha-2}l;0)\cdot 4S(1;b_1 2^{\beta-2}l;0)\cdot 4S(1;c_1 2^{\gamma-2}l;0)\cdot 2(1+i^{dl})=2^7(1+i^{dl}).$$

Тогда

$$A(4)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4}e^{-2\pi i\frac{nl}{4}}(1+i^{dl})=\frac{1}{2}(K(4,n,0)+\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4}e^{-2\pi i\frac{nl}{4}}i^{dl}).$$

По лемме 2 $K(4;\ n;\ 0)=0$. Если $d\equiv 1 \pmod 4$, то $A(4)=1/2\cdot K_i(4;n;0)$. Если $d\equiv 3 \pmod 4$, то $A(4)=-1/2\cdot K_i(4;n;0)$. По лемме 3 имеем

$$A(4)=\left(\frac{-1}{dn}\right).$$

Из леммы 1 следует

$$S(8;\ al;\ 0)\ S(8;\ bl;\ 0)\ S(8;\ cl;\ 0)\ S(8;\ dl;\ 0)=$$

$$=8S(1;a_1 2^{\alpha-3}l;0)\cdot 8S(1;b_1 2^{\beta-3}l;0)\cdot 8S(1;c_1 2^{\gamma-3}l;0)\cdot\left(\frac{2}{dl}\right)2^{3/2}(1+i^{dl})=\left(\frac{2}{dl}\right)2^{21/2}(1+i^{dl})$$

Тогда

$$A(8)=2^{-3/2}\left(\frac{2}{d}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}e^{-2\pi i\frac{nl}{8}}\left(\frac{2}{l}\right)(1+i^{dl})=2^{-3/2}\left(\frac{2}{d}\right)(K_2(8,n,0)+\left(\frac{-1}{d}\right)K_{2i}(8,n,0)).$$

По леммам 4 и 5 получаем

$$A(8)=\left(\frac{2}{dn}\right)(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)).$$

$A(q)$=0 при α > 3.

Получаем множитель

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha}a_1,(a_1,2)=1\\ b=p^{\beta}b_1,(b_1,2)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,(c_1,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1\\ 3\le\alpha\le\beta\le\gamma}}^{2}\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)+\left(\frac{2}{dn}\right)(1+\left(\frac{-1}{dn}\right))\right)=\prod_{\substack{a=p^{\alpha}a_1,(a_1,2)=1\\ b=p^{\beta}b_1,(b_1,2)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,(c_1,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1\\ 3\le\alpha\le\beta\le\gamma}}^{2}\left((1+\left(\frac{-1}{dn}\right))(1+\left(\frac{2}{dn}\right))\right).$$

Множитель равен 0 при $\left(\frac{-1}{dn}\right)$=–1 или $\left(\frac{2}{dn}\right)$=–1. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kloosterman, H. D. On the representation of number in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ // Acta mathematica. – 1926. – V. 49. – P. 407–464.
2. Куртова Л.Н., Мотькина Н.Н. О видах решений задачи Лагранжа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 166. – С. 41–48.
3. Малышев, А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. – 1962. – Т. 65. – С. 3–212.

Куртова Лилиана Николаевна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород

К.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования

Тел.: +7(4722) 30-13-56

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Мотькина Наталья Николаевна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород

К.ф.-м.н., доцент кафедры математики

Тел.: +7(4722) 30-13-00*28-13

E-mail: motkina@bsu.edu.ru